Construção de tábuas de mortalidade de inválidos por meio de modelos estatísticos bayesianos

Aloísio Joaquim Freitas Ribeiro*
Edna Afonso Reis**
Joana Barbabela Barbosa***

Este trabalho teve como objetivo a construção de tábuas de mortalidade de inválidos dos segurados de clientela urbana do Regime Geral da Previdência Social. Assumindo que o número de mortes em cada idade segue uma distribuição de Poisson, as taxas de mortalidade por idade simples foram graduadas por meio de métodos estatísticos bayesianos, pelo modelo paramétrico de Gompertz-Makehan, utilizando inferência estatística bayesiana. Foram construídas tábuas de mortalidade para homens e mulheres e intervalos de credibilidade para os parâmetros e componentes do modelo, bem como para as taxas de mortalidade e funções da tábua. Uma aplicação foi feita calculando-se uma anuidade e o passivo atuarial.

Palavras-chave: Tábuas de mortalidade. Estatística bayesiana. MCMC. Modelo Gompertz-Makehan.

Introdução

Com o aumento da expectativa de vida e o crescimento da previdência no Brasil, estudos sobre a estrutura da mortalidade vêm adquirindo cada vez mais importância nas abordagens demográficas. O país é deficitário em estudos sobre mortalidade de grupos específicos, em especial para os aposentados por invalidez.

A invalidez é definida, pela Previdência Social Brasileira, como "a incapacidade do segurado para o trabalho, insuscetível de reabilitação para o exercício de atividade que lhe garanta a subsistência" (BRASIL, 1999). Impossibilitado de trabalhar, o segurado perde sua renda e tem suas despesas aumentadas com gastos de saúde.

Os planos de previdência e os seguros com cobertura para invalidez devem planejar os custos futuros com estes benefícios, sendo necessário o conhecimento do fluxo de beneficiários. O número de inválidos deriva das probabilidades de entrada em invalidez e de transição do estado de inválido para a morte, apresentadas na forma de tábuas.

As probabilidades de morte têm impacto direto sobre o custo estimado dos benefícios de aposentadoria, pois, quanto menores forem, maior será a expectativa de vida do beneficiário e maiores serão os gastos da previdência. Assim, é importante que as probabilidades de morte estejam

* Doutor em Demografia, professor adjunto do Departamento de Estatística da UFMG.
** Doutora em Estatística, professora adjunta do Departamento de Estatística da UFMG.
*** Graduanda em Ciências Atuariais da UFMG.

próximas da realidade dos segurados naquele momento.

Não existe um consenso sobre qual tábua é mais apropriada para ser utilizada, pois o nível e a estrutura de mortalidade são variáveis no tempo e de população para população. No Brasil, há grande diversidade entre as tábuas utilizadas pelas entidades de seguro e previdência, sendo que a própria legislação brasileira indica tábuas que refletem experiências muito antigas ou de outras populações. A Portaria MPAS n. 7.796, de 28 de agosto de 2000, por exemplo, determina que os Regimes Próprios de Previdência Social dos servidores públicos devem utilizar as tábuas: de sobrevivência – AT-49 (MALE), como limite máximo de taxa de mortalidade; de entrada em invalidez – Álvaro Vindas, como limite mínimo de taxa de entrada em invalidez; e de mortalidade de inválidos – experiência IAPC, como limite máximo de taxa de mortalidade.

Segundo Magalhães e Bugarin (2004), a tábua AT-49 foi desenvolvida por Lumsdem, do Mortality Committy (EUA), observando a taxa de sobrevivência e mortalidade no período de 1941 a 1946. A de entrada em invalidez Álvaro Vindas foi construída pelo mesmo, em 1957, para o Departamento Actuarial y Estadístico de la Caja Costarricense de Seguro Social (CCSS). Já a tábua de mortalidade de inválidos IAPC foi elaborada com base nos dados do Instituto de Aposentados e Pensões dos Comerciários, extinto em 1966. Além disso, como exemplificado em Castro (1997), grande parte das mudanças implementadas na legislação até hoje teve como base sugestões e decisões políticas e sociais, desconsiderando a evolução das componentes demográficas, atuariais e econômicas implícitas no sistema.

Este trabalho apresenta tábuas de mortalidade de inválidos construídas a partir das informações dos segurados de clientela urbana do Regime Geral da Previdência Social, que rege a previdência social básica, universal e compulsória dos trabalhadores do setor privado. Foram obtidas as taxas de mortalidade por idade simples e graduadas por meio do modelo paramétrico de Gompertz-Makehan, estimado via inferência estatística bayesiana.

A abordagem bayesiana do processo de graduação trata da estimação estatística dos parâmetros desconhecidos, em que são agregados aos dados conhecimentos iniciais (distribuição a *priori*) sobre os parâmetros estudados (NEVES; MIGON, 2006). Esses métodos propiciam resultados adicionais àqueles obtidos pela abordagem frequentemente utilizada, destacando-se os intervalos de confiança bayesianos (intervalos de credibilidade) para os parâmetros e componentes do modelo (CONGDON, 2001), bem como para as taxas de mortalidade e funções da tábua de mortalidade. Alguns trabalhos sobre a graduação de taxas de mortalidade utilizando modelos bayesianos já foram publicados, inclusive no Brasil, entre eles: Gordon (1998), Mendonza et al. (2001) e Neves e Migon (2006).

Dados

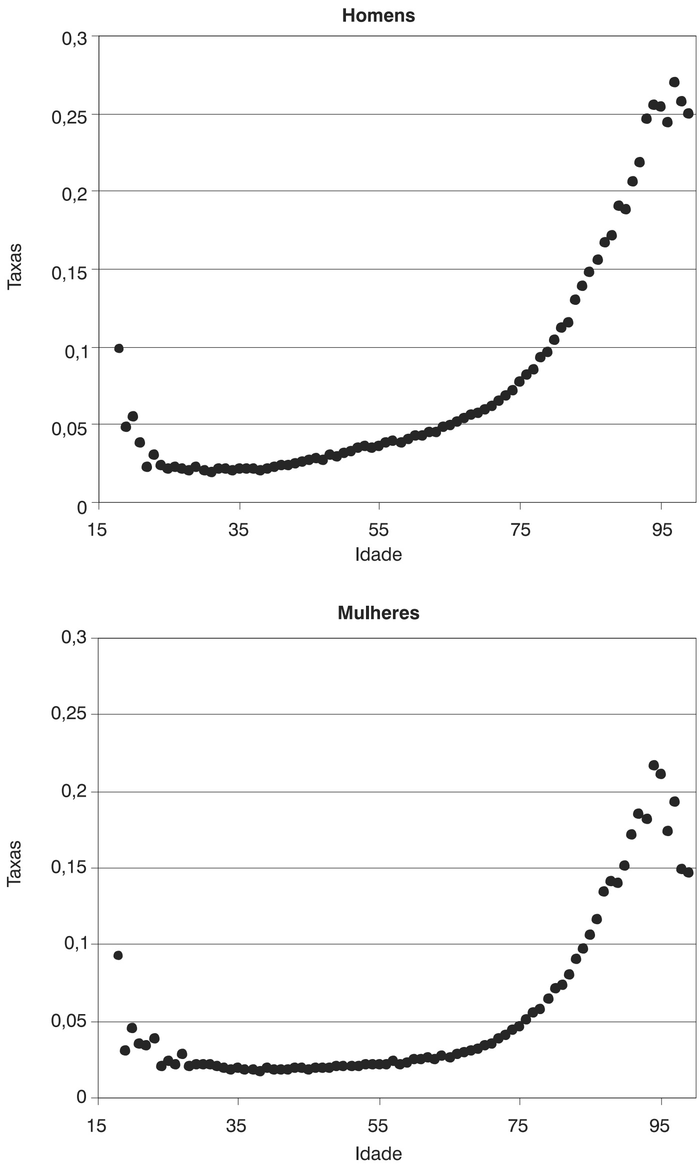
Os dados utilizados neste estudo, cedidos pelo Ministério da Previdência Social, por meio de convênio com a UFMG, referem-se aos 2.354.135 benefícios de aposentadorias por invalidez, de clientela urbana, que estiveram ativos em algum instante do período entre 01/01/1999 e 31/12/2002. Foram excluídas, da análise, informações de 8.700 beneficiários, por apresentarem inconsistência nas datas de nascimento, início e cessação de benefícios. Dados de mortalidade e tempo de exposição ao risco de 43.698 beneficiários, para os quais não havia indicação de sexo, foram redistribuídos proporcionalmente segundo a composição por sexo dessas variáveis para aqueles que possuíam a informação de sexo.

Para construção das tábuas de mortalidade, o número de mortes e o tempo total de exposição ao risco foram obtidos por idade simples e sexo. Entre os beneficiários, 59,8% eram homens, 38,2% mulheres e 2% apresentavam sexo ignorado. Foram observadas 227.821 mortes entre os beneficiários do sexo masculino, para um tempo total de exposição ao risco igual a 4.612.349,61 pessoas-ano; para as mulheres, foram 94.442 mortes para 3.006.045,42 pessoas-ano. Considerações sobre as limitações dos dados e de como foram obtidas as informações sobre número de mortes e exposição ao risco podem ser vistas em Ribeiro et al. (2007).

Os dados utilizados neste projeto estão separados por sexo e estruturados na forma *(x,E_x,d_x)*, onde x denota a idade do beneficiário, E_x é o tempo (pessoas-ano) de exposição ao risco de morte e d_x é o número de mortes na idade x.

As taxas brutas de mortalidade por idade e sexo, obtidas por $r_x = d_x / E_x$ são apresentadas no Gráfico 1. Consideram-se, neste estudo, os dados relativos ao intervalo

GRÁFICO 1
Taxas brutas de mortalidade específicas, por idade e sexo
Brasil – 1999-2002



Fonte: Ministério da Previdência Social. Elaboração dos autores.

de idade entre 25 e 95 anos. Abaixo dos 25 e acima dos 95 anos, as taxas brutas possuem maior variabilidade, pois o número de expostos é pequeno. Além disso, a taxa de entrada em invalidez para jovens adultos é baixa e, nas idades avançadas, ocorrem mais frequentemente erros de declaração e omissão da idade.

Dentro do intervalo de idade escolhido, as taxas brutas são estimadas individualmente em cada grupo e possuem um comportamento irregular, não variando suavemente com a idade. Para que possam ser utilizadas por um plano de previdência no cálculo de prêmios e reservas, as taxas brutas devem ser suavizadas por meio de um processo chamado de graduação (HABERMAN; RENSHAW, 1996). A graduação é necessária porque a sequência de taxas de mortalidades brutas, em geral, apresenta mudanças bruscas, que não correspondem à hipótese de que as probabilidades de morte para duas idades consecutivas devem ser bem próximas.

Inferência estatística bayesiana

Seja X uma variável de interesse, como, por exemplo, a intensidade de mortes em certa população. Na modelagem estatística, a distribuição de probabilidade de X é descrita por *parâmetros,* quantidades desconhecidas e não observáveis, denotadas aqui por θ.

A inferência estatística é feita especificando-se a distribuição amostral de X, chamada de *função de verossimilhança*, indicada por $p(x|\theta)$. Essa função associa a cada valor de θ a probabilidade de observar os dados amostrais x.

Na abordagem clássica de inferência, acredita-se que toda a informação sobre o parâmetro está na verossimilhança, ou seja, nos dados observados x. O método clássico mais usado, chamado *método de máxima verossimilhança*, determina como estimativa de θ o valor que maximiza a função de verossimilhança.

Já na abordagem bayesiana de inferência, assume-se que existe alguma informação sobre a distribuição de θ a *priori* de qualquer informação sobre este parâmetro dada pela amostra. Esta informação prévia sobre θ é apresentada na forma de uma distribuição de probabilidade $p(\theta)$, chamada de *distribuição a priori*. Se $p(\theta)$ é suficientemente *informativa*, tem-se a descrição completa da incerteza a respeito de θ. Mas, se $p(\theta)$ não é informativa o bastante, deve-se atualizar a informação a respeito de θ, observando uma amostra x e incorporando sua informação através da verossimilhança $p(x|\theta)$. Essa atualização é feita pelo Teorema de Bayes, em que:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\, p(\theta)}{p(x)}.$$

A inferência bayesiana é baseada em $p(\theta|x)$, chamada *distribuição a posteriori*, que descreve todo o conhecimento que se tem sobre θ disponível pela distribuição a *priori* e pela amostra.

Note-se que $p(x)$ não depende de θ. Assim, outra forma de se escrever a distribuição a *posteriori* é:

$$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)\, p(\theta),$$

ou seja, *a posteriori* é proporcional ao produto da *priori* pela *verossimilhança*. Essa forma simplificada do teorema de Bayes é utilizada pela abordagem bayesiana, em que todo o conhecimento que se tem sobre θ disponível pela *priori* é atualizado na *posteriori*.

A expressão analítica da *posteriori* é de fácil obtenção apenas em poucos casos, em especial aqueles nos quais a *posteriori* pertence à mesma família de distribuições que a *priori* (se diz que elas são *conjugadas*). A grande dificuldade aparece nos casos em que θ é um vetor de parâmetros. Nesses casos, as informações sobre a *posteriori* podem ser obtidas gerando-se uma amostra dela, por meio de métodos de simulação, em especial os Métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (em inglês, sigla MCMC) (GAMERMAN; LOPES, 2006).

Uma amostra da distribuição a *posteriori* é obtida quando o número de simulações se aproxima de infinito. Isto é impossível na prática e, assim, as inferências são realizadas a partir de número de simulações finito, suficientemente grande. A determinação do número de simulações suficientes para a convergência das cadeias para a distribuição a *posteriori* é uma função particular de cada aplicação. Geralmente, dezenas de milhares de iterações são suficientes. Em todos os casos, as primeiras simulações são descartadas em função de reduzir o efeito dos valores iniciais. Um teste de convergência muito útil é obtido rodando várias simulações em paralelo, com diferentes valores iniciais, e depois comparando os resultados. O número de iterações deve ser aumentado se os resultados forem diferentes.

Para a realização dessas técnicas de simulação estocásticas, são utilizados *softwares* como o WinBUGS (SPIEGELHALTER; THOMAS; BEST, 2003). Como seu propósito básico é programar análises MCMC, sua linguagem de programação é eficiente, resumida e proporciona ferramentas para a análise da convergência.

Os métodos bayesianos baseados em amostragem da distribuição a *posteriori* fornecem um perfil completo da distribuição do(s) parâmetro(s), permitindo o teste de um amplo conjunto de hipóteses sobre os parâmetros.

Modelo para graduação das taxas de mortalidade

As taxas brutas de mortalidade podem ser graduadas por meio de modelos paramétricos ou não paramétricos. Os modelos paramétricos comumente utilizados na literatura, como em Debón et al. (2005) e Forfar et al. (1988), são funções de sobrevivência baseadas nas Leis de Mortalidade, que têm por objetivo estimar a mortalidade, a sobrevida ou o risco de morte em uma determinada idade.

Em 1825, Benjamim Gompertz observou que a mortalidade humana aumenta exponencialmente com a idade x e propôs um modelo paramétrico que relaciona a força de mortalidade μ_x com a idade. Esse modelo, chamado de Gompertz, é definido por:

$$\mu_x = \alpha \exp(\beta x), \alpha > 0, \beta > 0$$

Nele, α é um parâmetro de escala que representa o nível geral de mortalidade adulta e β determina como o risco de mortalidade aumenta com a idade.

Mais tarde, Makeham verificou que o modelo de Gompertz não representa adequadamente as intensidades de morte nas idades avançadas e, assim, incluiu o termo constante α_1, que pode ser interpretado como o risco de morte por causas que independem da idade. Esse modelo, chamado de Gompertz-Makeham (GM), é definido por:

$$\mu_x = \alpha_1 + \alpha_2 \exp(\beta x),$$

supondo-se as seguintes restrições: $\alpha_1>0$, $\alpha_2>-\beta$ e $\beta>0$.

No modelo GM, α_2 e β têm a mesma interpretação. Para garantir que as intensidades de mortalidade sejam sempre positivas, o parâmetro α_1 é restrito ao intervalo $\alpha_1>-\alpha_2$. Fazendo $\frac{1}{\gamma} = e^{-\beta}$, temos que $0 < \gamma < 1$ e $\mu_x = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^x$.

Assumindo que os segurados com mesma idade morrem independentemente e com mesma probabilidade, o número de mortes na idade x, d_x tem distribuição de Poisson com média $\lambda_x = E_x \mu_x$, onde os e_x são assumidos conhecidos e $\mu_x > 0$ são as quantidades a serem estimadas:

$$d_x|\mu_x \sim Poisson\ (E_x\, \mu_x), x=x_{min},...,x_{max} \quad (1),$$

onde x_{min} e x_{max} são, respectivamente, a menor e a maior idade consideradas.

Assumindo que as intensidades de mortes μ_x crescem com a idade segundo um modelo Gompertz-Makeham e a função de ligação canônica para a distribuição de Poisson, tem-se que:

$$\ln(\lambda_x) = \ln(e_x) + \ln(\mu_x) \quad (2)$$

$$\mu_x = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^x \quad (3)$$

A especificação do modelo é completada estabelecendo-se as seguintes distribuições de probabilidade a *priori* para os parâmetros α_1, α_2 e γ:

$$\gamma \sim Uniforme(0,1); \quad (4)$$

$$\alpha_2 \sim Gamma(a,b); \quad (5)$$

$$\alpha_1 \sim Normal(c,d)\ I(\alpha_1 > -\alpha_2). \quad (6)$$

A escolha das constantes a, b, c e d, que determinam as distribuições dos parâmetros α_1 e α_2, foi feita empiricamente. A média de α_1 foi igualada a zero e, para ser uma distribuição pouco informativa, foi feito d=0,0001. Quando α_1=0, o modelo GM se equipara ao modelo Gompertz, resultando a equação: $\ln(\hat{\mu}) = \ln(\alpha_2) - x\ln(\gamma)$, que foi então ajustada pelo método de mínimos quadrados. Como a esperança e variância de uma Gama (a,b) são iguais a a/b e a/b^2, respectivamente, tomou-se $b=1$ e a igual ao valor estimado de α_2.

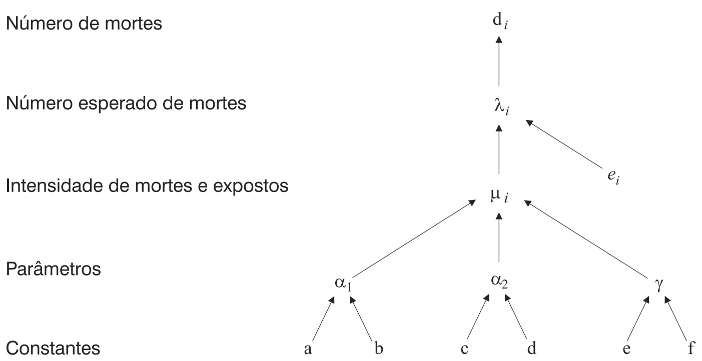
O modelo hierárquico pode ser resumido como na Figura 1.

A inferência sobre os parâmetros $(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ é baseada na sua função densidade de probabilidade a *posteriori* condicional às estatísticas de mortalidade (d_x e E_x), dada por

$$p(\alpha_1,\alpha_2,\beta|d_x,E_x) \propto f(d_x|\alpha_1,\alpha_2,\beta)\ p(\alpha_1,\alpha_2,\beta).$$

Esta função não assume uma forma conhecida e não é analiticamente tratável. Foi necessária, portanto, a geração de uma amostra desta *posteriori*, pelos métodos de simulação MCMC descritos na seção anterior. Para tanto, utilizamos o programa computacional WinBUGS. A convergência das cadeias foi verificada utilizando-se técnicas de disponíveis no programa CODA (COWLES et al., 1995).

FIGURA 1
Resumo gráfico do modelo



Resultados

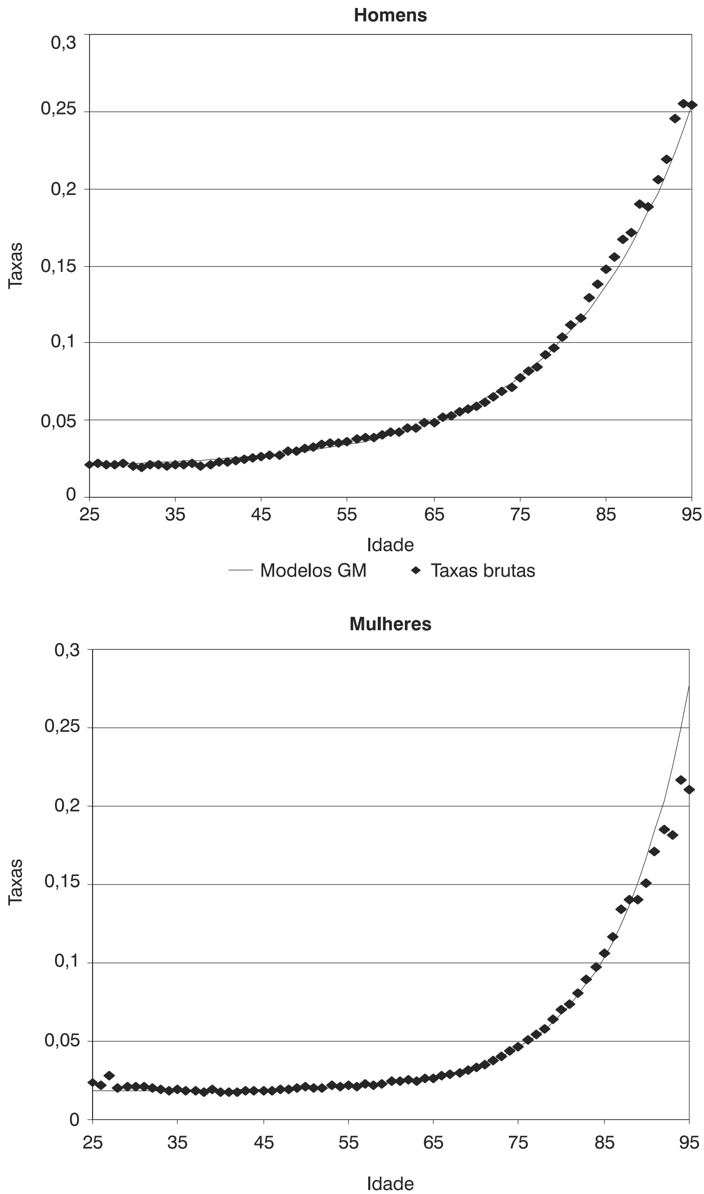
As taxas de mortalidade estimadas pelo modelo (1)-(6) são mostradas no Gráfico 2. O intervalo de credibilidade obtido para a intensidade de mortalidade não foi plotado por ser muito pequeno em relação à escala do gráfico, mas pode ser encontrado na Tabela 1 do Anexo.

A partir dos valores de intensidade de mortalidade estimados, foi calculado q_x, que representa a probabilidade de um indivíduo com idade x sobreviver até a idade $x+1$, e os demais componentes da tábua de mortalidade: l_x, d_x e e_x. Esses componentes são construídos em função de q_x. O símbolo l_x denota o número de sobreviventes à idade x, d_x corresponde ao número de indivíduos que faleceram ao longo da idade x e e_x é a esperança de vida. Por exemplo, a esperança de vida estimada das mulheres inválidas de 60 anos é de 10,87 anos e a dos homens equivale a 9,15 anos. A tábua completa é apresentada na Tabela 2 do Anexo.

Como pode ser visto no Gráfico 2, para o sexo feminino, o Modelo GM superestima as taxas de mortalidade acima dos 90 anos. Este fenômeno é conhecido como desaceleração da mortalidade (HORIUCH; WILMOTH, 1998). Segundo esses autores, uma das possíveis explicações desse fenômeno é a hipótese de heterogeneidade, em que os indivíduos mais frágeis tendem a morrer nas idades mais jovens, sobrevivendo às idades avançadas aqueles com melhores condições de saúde e estilos de vida saudáveis. Uma forma de considerar esta heterogeneidade no modelo é incluir a variável duração da invalidez, pois é conhecido da literatura que, para uma mesma idade, as taxas de mortalidade tendem a diminuir com a duração da invalidez.

O mesmo fenômeno não é observado para o sexo masculino, como é mostrado também no Gráfico 2. Neste caso, o modelo Gompertz-Makeham tende a superestimar as taxas de mortalidade nas idades avançadas. Apesar disso, os modelos ajustados

GRÁFICO 2
Taxas de mortalidade específicas por idade e sexo estimadas pelo modelo GM, sobrepostas às taxas brutas
Brasil – 1999-2002



Fonte: Ministério da Previdência Social. Elaboração dos autores.

produzem estimativas suaves das taxas de mortalidades, descrevendo satisfatoriamente as taxas brutas.

Como parte do resultado, é mostrada uma possível aplicação atuarial das taxas, no cálculo de anuidades e do passivo atuarial. A aposentadoria por invalidez é um tipo de benefício não programado em que, via de regra, o indivíduo recebe uma renda vitalícia ou por prazo determinado, cujo valor presente dos pagamentos anuais é obtido mediante a multiplicação do seu valor anual por uma anuidade. Anuidade é definida como o valor presente atuarial de uma renda de valor unitário paga periodicamente durante um determinado período de tempo ou vitaliciamente. Vamos considerar o exemplo de que uma renda unitária vitalícia e anual é paga no início de cada período (antecipada) e é denotada por:

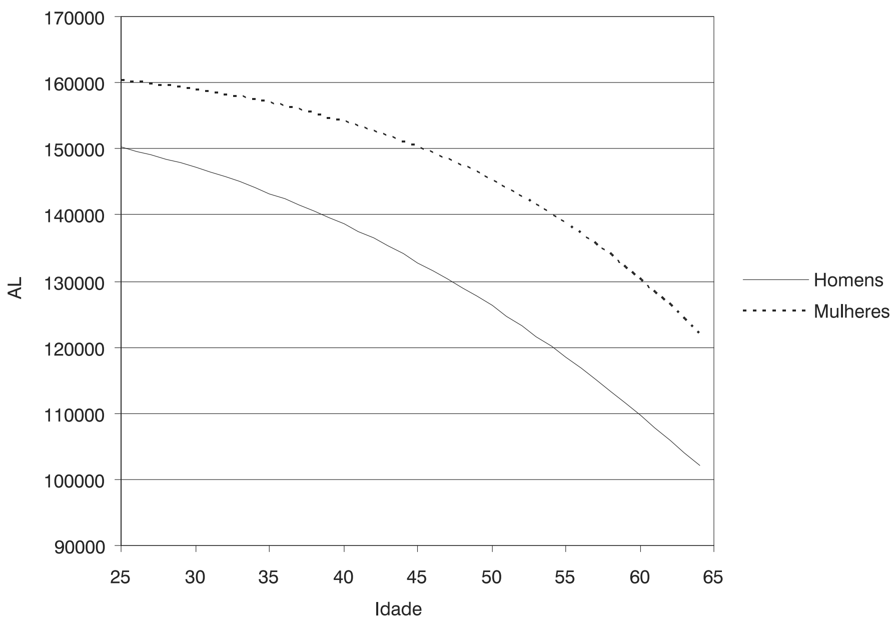
$$\ddot{a}_x^{(i)} = \sum {}_n p_x^{(i)} \cdot v^n$$

onde: ${}_n p_x^{(i)}$ é a probabilidade de uma pessoa inválida de idade x sobreviver até alcançar a idade $x + n$; v é o fator de desconto financeiro mensal do benefício para uma taxa anual de juros i; e w é a idade máxima considerada na tabela de vida, no caso, igual a 95 anos. O símbolo "(i)" sobreposto é utilizado para enfatizar que a probabilidade de sobrevivência é dada por uma tábua de inválidos.

Denota-se por B_r o valor anual do benefício de aposentadoria por invalidez que o individuo irá receber de forma vitalícia. Considera-se que não há crescimento salarial e B_r será corrigido apenas pela inflação. O valor presente atuarial do benefício é chamado de passivo atuarial (ou, em inglês, *actuarial liability* – AL_r*)* e no momento da aposentadoria $AL_r = B_r \ddot{a}_r^{(i)}$. Isso significa que AL_r é o valor no momento da aposentadoria por invalidez que será, em média, suficiente para pagar a renda anual ao inválido até o seu falecimento.

Essas funções atuariais também foram calculadas com o *software* WinBUGS. O Gráfico 3 mostra o valor do passivo atuarial variando com a idade de aposentadoria, considerando-se B_r = 12.000 unidades monetárias e i=0,06% ao ano.

GRÁFICO 3
Valor do passivo atuarial (ALr) na idade de aposentadoria, por sexo
Brasil – 1999-2002



Fonte: Ministério da Previdência Social. Elaboração dos autores.

Discussão e extensões

O presente trabalho construiu uma tábua de mortalidade para inválidos, segregada por sexo, utilizando a graduação das taxas via o modelo paramétrico de Gompertz-Makehan.

Os parâmetros desse modelo foram estimados via inferência bayesiana. A vantagem da utilização da inferência bayesiana é a fácil obtenção de estimativas intervalares para todos os componentes do modelo. Além disso, todo o conhecimento prévio do pesquisador pode ser incorporado através da distribuição *a priori*.

É conhecido que os diferenciais de mortalidade tendem a diminuir com a duração da invalidez. O período de tempo durante o qual o efeito de duração é importante é chamado de período de seleção. Em um próximo trabalho pretende-se, utilizando a abordagem bayesiana, incluir no modelo a duração da invalidez, considerando-se a determinação do período de seleção uma característica intrínseca do modelo.

Uma outra extensão deste trabalho seria a avaliação da tabela de vida produzida em relação aos modelos e outras tabelas existentes.

Referências

BENJAMIN, B.; POLLARD, J. H. **The analysis of mortality and other actuarial statistics**. 2ª ed. London: Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries, 1980.

BOWERS, N. J.; GERBER, H. U.; HICKMAN, J. C.; JONES, D. A.; NESBIT, C.J. **Actuarial mathematics**. Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries, 1997.

BRASIL. Decreto n. 3.048 – 6 de maio de 1998. **Diário Oficial da União**. Brasília, Seção 1, p. 50-108, 7 de maio de 1999.

CASTRO, M. C. **Entradas e saídas no sistema previdenciário brasileiro:** uma aplicação de tábuas de mortalidade. Dissertação (Mestrado). Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.

CONGDON, P. **Bayesian statistical modelling.** New York: John Wiley & Sons, 2001.

COWLES, M. K.; BEST, N. G.; VINES, S. K. **CODA: Convergence Diagnosis and Output Analusis Software for Gibbs sampling output**. Cambridge: MRC Biostatistics Unit, 1995.

DEBÓN, A.; MONTES, F.; SALA, R. **A comparison of parametric models for mortality graduation**. Application to mortality data for the Valencia Region (Spain). Valencia: Sort 29(2), 2005, p. 269-288.

FORFAR, D.; MCCUTCHEON, J.; WILKIE, A. On graduation by mathematical formula. **Journal of the Institute of Actuaries**, 115, p. 1-149, 1988.

GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. **Monte Carlo Markov Chain**: stochastic simulation for bayesian inference. 2ª ed. Londres: Chapman & Hall/CRC, 2006.

GORDON, R. J. **Applying the Gibbs sampler and the metropolis algorithm to bayesian graduation of mortality rates**. M.Sc. dissertation. New York: New York University, 1998.

HABERMAN, S.; RENSHAW, A. Generalized linear models and actuarial science. **The Statistician**, v. 45, n. 4, p. 407-436, 1996.

HORIUCHI, S.; WILMOTH, J. Decelaration in the age pathern of mortality at older ages. **Demography**, v. 35, n. 4, p. 391-412, 1998.

MAGALHÃES, P. B.; BUGARIN, M. N. S. Simulações da previdência social brasileira: estudo de caso do Regime Jurídico Único. **Estudos Econômicos,** São Paulo, v. 34, n. 4, p. 627-659, 2004.

MENDOZA, M.; MADRIGAL, A. M.; GUTIÉRREZ-PEÑA, E. **Predictive mortality graduation and the value at risk**: a bayesian approach. Working Paper DE-C01.5, ITAM, México, 2001.

MERINO, A.; GARCIA, E. P.; SOLER, J. V. Análisis dinâmico de la invalidez: aplicacion a los seguros de riesgo. **Actuários**, n. 21, p. 201-224, 2003.

MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA E ASSISTÊNCIA SOCIAL. Portaria MPAS n. 7.796 de 28 de agosto de 2000. **Diário Oficial da União**. Brasília, 31 de agosto de 2000.

NEVES, C. R.; MIGON, H. S. Graduação bayesiana de taxas de mortalidade: uma aplicação na cobertura de sobrevivência e na avaliação da provisão matemática. **Revista Brasileira de Risco e Seguro**, v. zero, p. 85-104, 2006.

RIBEIRO, A. J. F.; FÍGOLI, M. G. B.; SAWYER, D. R. T. O.; CÉSAR, C. C. Tábuas de mortalidade dos aposentados por invalidez pelo Regime Geral da Previdência Social. **Revista Brasileira de Estudos de População**, v. 24, p. 91-108, 2007.

SPIEGELHALTER, D.; THOMAS, A.; BEST, N. **User manual WinBUGS**: version 1.4. Cambridge: MRC Biostatistics Unit, 2003.

ANEXO

TABELA 1
Taxas de mortalidades estimadas e intervalo de credibilidade, segundo sexo e idade
Brasil – 1999-2002

Idade	Taxa de mortalidade	Intervalo de credibilidade	
		2,5%	97,5%
Mulheres			
25	0,01828	0,018	0,0186
26	0,01829	0,018	0,0186
27	0,01831	0,018	0,0186
28	0,01832	0,0181	0,0186
29	0,01834	0,0181	0,0186
30	0,01836	0,0181	0,0187
31	0,01838	0,0181	0,0187
32	0,01841	0,0181	0,0187
33	0,01843	0,0182	0,0187
34	0,01846	0,0182	0,0188
35	0,0185	0,0182	0,0188
36	0,01854	0,0183	0,0188
37	0,01858	0,0183	0,0189
38	0,01863	0,0184	0,0189
39	0,01868	0,0184	0,019
40	0,01874	0,0185	0,019
41	0,01881	0,0186	0,0191
42	0,01889	0,0186	0,0192
43	0,01897	0,0187	0,0192
44	0,01907	0,0188	0,0193
45	0,01917	0,0189	0,0194
46	0,01929	0,0191	0,0195
47	0,01942	0,0192	0,0197
48	0,01957	0,0193	0,0198
49	0,01973	0,0195	0,02
50	0,01992	0,0197	0,0202
51	0,02012	0,0199	0,0204
52	0,02035	0,0201	0,0206
53	0,02061	0,0204	0,0208
54	0,02089	0,0207	0,0211
55	0,02121	0,021	0,0214
56	0,02157	0,0214	0,0218
57	0,02197	0,0218	0,0222
58	0,02242	0,0222	0,0226
59	0,02292	0,0227	0,0231
60	0,02348	0,0233	0,0237
61	0,0241	0,0239	0,0243
62	0,0248	0,0246	0,025
63	0,02558	0,0254	0,0258
64	0,02645	0,0262	0,0267
65	0,02742	0,0272	0,0276
66	0,02851	0,0283	0,0287
67	0,02973	0,0295	0,03
68	0,03108	0,0308	0,0313
69	0,0326	0,0323	0,0329
70	0,0343	0,034	0,0346
71	0,0362	0,0359	0,0365
72	0,03831	0,038	0,0386
73	0,04068	0,0403	0,041
74	0,04333	0,043	0,0437
75	0,04629	0,0459	0,0467
76	0,04959	0,0492	0,05
77	0,05329	0,0528	0,0538
78	0,05742	0,0569	0,058
79	0,06204	0,0614	0,0626
80	0,06719	0,0665	0,0679
81	0,07296	0,0722	0,0737
82	0,07941	0,0785	0,0803
83	0,0866	0,0855	0,0877
84	0,09465	0,0934	0,0959
85	0,1036	0,1021	0,1052
86	0,1137	0,1119	0,1155
87	0,1249	0,1228	0,1271
88	0,1375	0,1349	0,1401
89	0,1515	0,1485	0,1546
90	0,1672	0,1637	0,1708
91	0,1847	0,1805	0,189
92	0,2043	0,1993	0,2094
93	0,2262	0,2203	0,2322
94	0,2507	0,2438	0,2578
95	0,278	0,2699	0,2864

Idade	Taxa de mortalidade	Intervalo de credibilidade	
		2,5%	97,5%
Homens			
25	0,02138	0,02098	0,02179
26	0,02151	0,02112	0,02191
27	0,02165	0,02127	0,02205
28	0,02181	0,02143	0,0222
29	0,02197	0,0216	0,02235
30	0,02215	0,02178	0,02252
31	0,02233	0,02198	0,0227
32	0,02254	0,02218	0,0229
33	0,02275	0,02241	0,02311
34	0,02298	0,02264	0,02333
35	0,02323	0,0229	0,02357
36	0,0235	0,02318	0,02382
37	0,02378	0,02347	0,0241
38	0,02408	0,02378	0,02439
39	0,02441	0,02412	0,02471
40	0,02476	0,02448	0,02506
41	0,02514	0,02486	0,02542
42	0,02554	0,02527	0,02581
43	0,02597	0,02571	0,02624
44	0,02643	0,02618	0,02669
45	0,02693	0,02668	0,02718
46	0,02745	0,02722	0,0277
47	0,02802	0,0278	0,02826
48	0,02863	0,02841	0,02886
49	0,02928	0,02907	0,0295
50	0,02998	0,02977	0,03019
51	0,03073	0,03053	0,03094
52	0,03153	0,03133	0,03173
53	0,03239	0,03219	0,03259
54	0,03331	0,03311	0,0335
55	0,03429	0,0341	0,03449
56	0,03535	0,03516	0,03555
57	0,03648	0,03629	0,03668
58	0,03769	0,03749	0,0379
59	0,03899	0,03879	0,03921
60	0,04038	0,04017	0,0406
61	0,04187	0,04166	0,04211
62	0,04347	0,04325	0,04371
63	0,04518	0,04495	0,04543
64	0,04702	0,04677	0,04727
65	0,04898	0,04873	0,04925
66	0,05109	0,05082	0,05136
67	0,05335	0,05307	0,05363
68	0,05576	0,05548	0,05606
69	0,05835	0,05805	0,05866
70	0,06113	0,06081	0,06145
71	0,0641	0,06377	0,06443
72	0,06729	0,06694	0,06763
73	0,0707	0,07034	0,07107
74	0,07436	0,07397	0,07474
75	0,07828	0,07787	0,0787
76	0,08248	0,08204	0,08293
77	0,08698	0,0865	0,08747
78	0,0918	0,09127	0,09235
79	0,09697	0,09638	0,09757
80	0,1025	0,1018	0,1032
81	0,1084	0,1077	0,1092
82	0,1148	0,1139	0,1156
83	0,1216	0,1206	0,1226
84	0,1289	0,1278	0,13
85	0,1367	0,1354	0,138
86	0,1451	0,1436	0,1465
87	0,1541	0,1524	0,1557
88	0,1637	0,1618	0,1656
89	0,174	0,1718	0,1761
90	0,185	0,1826	0,1875
91	0,1969	0,1941	0,1996
92	0,2096	0,2064	0,2126
93	0,2232	0,2195	0,2267
94	0,2377	0,2336	0,2417
95	0,2533	0,2487	0,2578

Fonte: Ministério da Previdência Social. Elaboração dos autores.

TABELA 2
Tábua de mortalidade básica, segundo sexo e idade
Brasil – 1999-2002

Idade	lx	dx	qx	ex	ax
Mulheres					
25	100000	1808	0,01808	35,350	13,32
26	98190	1777	0,01810	34,990	13,30
27	96410	1746	0,01811	34,630	13,28
28	94670	1716	0,01813	34,260	13,26
29	92950	1687	0,01814	33,880	13,23
30	91270	1658	0,01816	33,500	13,21
31	89610	1630	0,01819	33,110	13,18
32	87980	1602	0,01821	32,710	13,15
33	86380	1575	0,01824	32,310	13,12
34	84800	1549	0,01827	31,900	13,08
35	83250	1524	0,01830	31,480	13,05
36	81730	1499	0,01834	31,060	13,01
37	80230	1475	0,01838	30,630	12,96
38	78750	1452	0,01843	30,200	12,92
39	77300	1429	0,01849	29,750	12,87
40	75870	1407	0,01855	29,310	12,82
41	74470	1386	0,01861	28,850	12,77
42	73080	1366	0,01869	28,390	12,71
43	71710	1346	0,01877	27,920	12,65
44	70370	1328	0,01887	27,440	12,58
45	69040	1310	0,01897	26,960	12,52
46	67730	1293	0,01909	26,470	12,44
47	66440	1277	0,01922	25,980	12,37
48	65160	1262	0,01936	25,480	12,28
49	63900	1248	0,01953	24,970	12,20
50	62650	1235	0,01971	24,460	12,10
51	61420	1223	0,01991	23,940	12,01
52	60190	1212	0,02014	23,420	11,90
53	58980	1203	0,02039	22,890	11,80
54	57780	1194	0,02067	22,350	11,68
55	56590	1188	0,02099	21,810	11,56
56	55400	1182	0,02134	21,270	11,44
57	54220	1178	0,02173	20,720	11,30
58	53040	1176	0,02217	20,170	11,16
59	51860	1175	0,02266	19,620	11,02
60	50680	1177	0,02321	19,060	10,87
61	49510	1180	0,02382	18,500	10,71
62	48330	1185	0,02451	17,940	10,54
63	47140	1192	0,02527	17,380	10,37
64	45950	1201	0,02612	16,820	10,18
65	44750	1212	0,02707	16,260	10,00
66	43540	1225	0,02813	15,690	9,80
67	42310	1241	0,02932	15,130	9,60
68	41070	1259	0,03064	14,580	9,39
69	39820	1279	0,03211	14,020	9,18
70	38540	1301	0,03375	13,470	8,96
71	37240	1325	0,03559	12,920	8,73
72	35910	1351	0,03763	12,380	8,49
73	34560	1379	0,03991	11,850	8,25
74	33180	1408	0,04245	11,320	8,01
75	31780	1438	0,04527	10,800	7,76
76	30340	1469	0,04843	10,290	7,50
77	28870	1499	0,05193	9,783	7,24
78	27370	1528	0,05584	9,292	6,98
79	25840	1555	0,06018	8,812	6,71
80	24290	1579	0,06501	8,344	6,45
81	22710	1598	0,07038	7,889	6,17
82	21110	1611	0,07634	7,449	5,90
83	19500	1617	0,08295	7,023	5,62
84	17880	1614	0,09029	6,613	5,34
85	16270	1601	0,09842	6,220	5,06
86	14670	1575	0,10740	5,845	4,77
87	13090	1537	0,11740	5,488	4,48
88	11560	1483	0,12840	5,151	4,18
89	10070	1415	0,14050	4,836	3,87
90	8656	1332	0,15390	4,545	3,53
91	7323	1235	0,16860	4,280	3,18
92	6088	1125	0,18480	4,047	2,77
93	4963	1005	0,20250	3,850	2,31
94	3958	878,4	0,22190	3,701	1,73
95	3080	3080	1,00000	3,614	1,00

Idade	lx	dx	qx	ex	ax
Homens					
25	100.000	2121	0,02121	29,28	12,50
26	97.880	2088	0,02134	28,90	12,45
27	95.790	2057	0,02147	28,52	12,40
28	93.730	2027	0,02162	28,13	12,35
29	91.710	1998	0,02178	27,74	12,30
30	89.710	1969	0,02195	27,35	12,25
31	87.740	1942	0,02213	26,95	12,19
32	85.800	1916	0,02233	26,55	12,13
33	83.880	1891	0,02254	26,14	12,06
34	81.990	1866	0,02276	25,74	12,00
35	80.130	1843	0,02300	25,32	11,93
36	78.280	1821	0,02326	24,91	11,86
37	76.460	1800	0,02354	24,49	11,78
38	74.660	1780	0,02383	24,07	11,71
39	72.880	1760	0,02415	23,64	11,63
40	71.120	1742	0,02449	23,21	11,54
41	69.380	1724	0,02486	22,78	11,46
42	67.660	1708	0,02524	22,35	11,37
43	65.950	1692	0,02566	21,92	11,27
44	64.260	1678	0,02611	21,48	11,17
45	62.580	1664	0,02659	21,04	11,07
46	60.910	1651	0,02710	20,60	10,97
47	59.260	1639	0,02765	20,16	10,86
48	57.620	1627	0,02824	19,72	10,75
49	56.000	1617	0,02887	19,28	10,64
50	54.380	1607	0,02954	18,84	10,52
51	52.770	1597	0,03027	18,40	10,40
52	51.180	1589	0,03104	17,95	10,27
53	49.590	1581	0,03187	17,51	10,14
54	48.010	1573	0,03276	17,07	10,01
55	46.430	1565	0,03371	16,64	9,88
56	44.870	1558	0,03473	16,20	9,74
57	43.310	1551	0,03582	15,76	9,60
58	41.760	1544	0,03698	15,33	9,45
59	40.220	1538	0,03823	14,90	9,30
60	38.680	1530	0,03957	14,47	9,15
61	37.150	1523	0,04100	14,05	8,99
62	35.620	1515	0,04253	13,63	8,84
63	34.110	1506	0,04416	13,21	8,67
64	32.600	1497	0,04592	12,80	8,51
65	31.110	1486	0,04779	12,39	8,34
66	29.620	1475	0,04979	11,99	8,17
67	28.150	1462	0,05193	11,59	8,00
68	26.680	1447	0,05422	11,20	7,83
69	25.240	1430	0,05667	10,81	7,66
70	23.810	1411	0,05929	10,43	7,48
71	22.400	1390	0,06208	10,06	7,30
72	21.010	1367	0,06507	9,69	7,12
73	19.640	1341	0,06826	9,33	6,94
74	18.300	1312	0,07168	8,98	6,76
75	16.990	1279	0,07532	8,63	6,57
76	15.710	1244	0,07920	8,29	6,39
77	14.460	1206	0,08335	7,96	6,20
78	13.260	1164	0,08778	7,64	6,02
79	12.090	1119	0,09250	7,33	5,83
80	10.980	1070	0,09753	7,02	5,64
81	9.905	1019	0,10290	6,73	5,45
82	8.885	965,1	0,10860	6,44	5,26
83	7.920	908,4	0,11470	6,17	5,06
84	7.012	849,7	0,12120	5,90	4,86
85	6.162	789,2	0,12810	5,65	4,66
86	5.373	727,5	0,13540	5,40	4,45
87	4.646	665,2	0,14320	5,17	4,23
88	3.981	602,9	0,15150	4,95	4,00
89	3.377	541,3	0,16030	4,74	3,74
90	2.836	481	0,16960	4,55	3,46
91	2.355	422,7	0,17950	4,38	3,14
92	1.932	367,1	0,19000	4,23	2,77
93	1.565	314,7	0,20110	4,10	2,31
94	1.250	266,2	0,21280	4,00	1,74
95	984	984,4	0,00000	3,95	1,00

Fonte: Ministério da Previdência Social. Elaboração dos autores.

Resumen

Construcción de tablas de mortalidad de inválidos por medio de modelos estadísticos bayesianos

Este trabajo tuvo como objetivo la construcción de tablas de mortalidad de inválidos procedentes de clientela urbana asegurada con el régimen general de la Seguridad Social. Asumiendo que el número de muertes en cada edad sigue una distribución de Poisson, las tasas de mortalidad por edad simple se graduaron mediante métodos estadísticos bayesianos, por el modelo paramétrico de Gompertz-Makehan, utilizando la inferencia estadística bayesiana. Se construyeron tablas de mortalidad para hombres y mujeres e intervalos de credibilidad para los parámetros y componentes del modelo, así como para las tasas de mortalidad y funciones de la tabla. Una aplicación se realizó calculando una anualidad y el pasivo actuarial.

Palabras-clave: Tablas de mortalidad. Estadística bayesiana. MCMC. Modelo Gompertz-Makehan.

Abstract

Construction of Life Boards of invalids using Bayesian statistics

The objective of this article is to construct life tables of invalids among urban beneficiaries of the General Regime of the National Brazilian Social Security System. Assuming that the number of deaths in each table follows a Poisson distribution, the death rates by simple age were graduated through Bayesian statistical methods, by using the Gompertz-Makehan parametric model and using Bayesian statistical inferences. Life tables were constructed for death rates of men and women, and credibility intervals were set up for the parameters and components of the model, as well as for the death rates and functions of the board. An application was made by calculating an annuity and the actuarial liabilities.

Keywords: Life tables. Bayesian statistics. MCMC. Gompertz-Makehan Model.

Recebido para publicação em 18/09/2009
Aceito para publicação em 30/03/2010